На правах рукописи

Полубоярова Наталья Михайловна

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛА ТИПА ПЛОЩАДИ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2010

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент **Клячин Владимир Александрович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Иванов Александр Олегович** доктор физико-математических наук, доцент **Шабалин Павел Леонидович**
Ведущая организация:	Институт Математики Сибирского Отделения РАН, г. Новосибирск

Защита состоится «23» декабря 2010 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 337.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан 15 ноября 2010 года

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Липачёв Е.К.

Общая характеристика работы

По своей проблематике данная диссертационная работа выполнена на стыке нескольких разделов анализа: теории отображений с ограниченным искажением, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, а также классического анализа. Основным объектом исследования стали поверхности, являющиеся экстремалями функционала типа площади

$$F(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(x,\xi) d\mathcal{M}, \tag{1}$$

где $\mathcal{M} = (M, u)$ – гиперповерхность, полученная C^3-вложением $u : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, M – n-мерное, связное, некомпактное, ориентируемое многообразие класса C^3 без края, $\Phi :\ \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ – C^2 – гладкая функция, ξ – единичная нормаль поверхности $\mathcal{M}$, $\Phi(x, -\xi) = \Phi(x, \xi)$. Если обозначить через ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определена величина $F(\mathcal{M})$, которая не зависит от выбора направления нормали ξ.

Актуальность темы. Исторические сведения. Известно, что одной из интересных и трудных задач теории минимальных поверхностей является нахождение условий их устойчивости, так как они тесно связаны с физическими вопросами о равновесии различных систем и описанием их устойчивых и неустойчивых состояний.

Так, в монографии Р. Финна [9] исследуются вопросы устойчивости капиллярных поверхностей, а в работе В. А. Саранина [7] изучается устойчивость так называемых магнитных жидкостей, которые приводят к рассмотрению функционалов вида (1) в качестве потенциальной энергии соответствующей физической системы.

В данной диссертационной работе рассматривается случай функционалов с функцией вида $\Phi(x, \xi) = \Phi(\xi)$, где $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ – единичная нормаль поверхности $\mathcal{M}$.

Следует отметить, что классы минимальных $(\Phi(\xi) \equiv 1)$ и максимальных $(\Phi(\xi) = \sqrt{2\xi_{n+1}^2 - 1})$ поверхностей в пространстве Минковского – это частные случаи изучаемых экстремальных поверхностей.

Проводимые в диссертации исследования берут свое начало в теории минимальных поверхностей в евклидовом пространстве. В настоящее время достаточно полно подобные исследования проведены для одномерных функционалов и для функционала площади. Имеется широкий спектр работ, посвященных исследованию устойчивости минимальных поверхностей в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах, в частности, работы Ю. А. Аминова, В. А. Клячина, В. М. Миклюкова, А. В. Погорелова, В. Г. Ткачева, А. А. Тужилина, А. Т. Фоменко, М. до Кармо, Ч. К. Пенга, Ш. Яу, Р. Финна, Дж. Саймонса и др.

Целью работы является получение качественных и количественных характеристик устойчивости и неустойчивости экстремалей функционала типа площади. А именно, получение признаков устойчивости и неустойчивости экстремальных поверхностей как в терминах знакоопределенности квадратичных форм, G-емкости, которая строится по функции $\Phi(\xi)$, с помощью изучения гауссова образа экстремальных поверхностей, так и в терминах локальных координат для поверхностей вращения с определенными условиями на функцию $\Phi(\xi)$.

Методика исследования основана на изучении выражения второй вариации рассматриваемых функционалов при бесконечно малых деформациях поверхностей, а также различных методах математического анализа, дифференциальной геометрии, линейной алгебры, вариационного исчисления, теории дифференциальных уравнений, теории отображений с ограниченным искажением.

Научная новизна и практическая значимость. Все результаты, полученные в работе, являются новыми не только для гиперповерхностей, заданных погружением многообразия в $\mathbb{R}^{n+1}$, но и для поверхностей вращения. Выделим основные из них.

1. Первая и вторая вариации функционала типа площади для n – мерной гиперповерхности, заданной вложением многообразия без края в $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Признак неустойчивости экстремальных поверхностей в терминах G – емкости, которая определяется рассматриваемым функционалом.

3. Теорема о том, что гауссово отображение двумерной экстремальной поверхности $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ является отображением с ограниченным искажением, и оценка коэффициента искажения при некоторых ограничениях на функцию $\Phi(\xi)$. Признак неустойчивости экстремальных поверхностей, полученный на основании оценки площади гауссова образа и обобщающий известный признак неустойчивости для минимальных поверхностей.

4. Признаки устойчивости и неустойчивости для экстремальных трубчатых поверхностей в $\mathbb{R}^3$ и поверхностей G-параболического типа в терминах G-емкости для случая $\Phi(\xi) = \Phi(\xi_3)$, пример вычисления G–емкости для экстремальных поверхностей вращения $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

5. Признаки устойчивости и неустойчивости для экстремальных поверхностей вращения $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, формулируемые с помощью оценок специальных интегралов, примеры нахождения областей устойчивости и неустойчивости, в том числе для p–минимальных и максимальных поверхностей.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение при создании вычислительных алгоритмов для нахождения и построения областей устойчивости экстремальных поверхностей, а также могут быть использованы специалистами при исследовании других функционалов типа площади, в теории капиллярных поверхностей, при исследовании поведения магнитных жидкостей и кровеносных капилляров. Материал диссертации может служить основой спецкурсов, написания курсовых, дипломных и других научных работ в высших учебных заведениях, где проводятся исследования по данной тематике.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международных и российских конференциях: Международной молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 2002, 2003, 2010), 12-й и 13-й Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2004, 2006), Международной школе–конференции «Геометрический анализ и его приложения» (Волгоград, 2004), Международной конференции, посвященной 200–летию Казанского государственного университета (Казань, 2004), Международной школе–конференции по анализу и геометрии, посвященной 75-летию академика Ю.Г. Решетняка (Новосибирск, 2004), международной Казанской летней научной школе–конференции «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, 2005, 2007, 2009), 12-ой Международной конференции европейских женщин–математиков (Волгоград, 2005), а также на научных конференциях студентов и молодых ученых города Волгограда и Волгоградской области (2002–2007 гг.) и конференциях профессорско-преподавательского состава Волгоградского государственного университета (2002–2007 гг.). Кроме того, все результаты подробно докладывались в разное время на научных семинарах «Геометрический анализ и его приложения» математического факультета Волгоградского государственного университета (рук. д.ф.-м.н., проф. А.Г. Лосев и д.ф.-м.н., проф. В.М. Миклюков) и «Сверхмедленные процессы» (рук. д.ф.-м.н., проф. В.М. Миклюков).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [13]–[30]. Публикация [13] выполнена в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежат постановки задачи и общие рекомендации о возможных путях исследования.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 97 страницах и состоит из введения, трех глав и списка литературы. В работе используется подчиненная нумерация. При этом нумерация параграфов и формул подчинена нумерации глав, нумерация определений, лемм, теорем — нумерации параграфов. Библиография диссертации содержит 54 наименования, включая работы автора.

Краткое содержание работы

Все утверждения сохраняют принятую в основном тексте нумерацию.

Во введении дается обзор литературы по вопросам, связанным с темой диссертации, а также кратко излагаются основные результаты диссертации.

Глава 1. «Формулы первой и второй вариации»

§1.1 носит вводный характер. Здесь выписаны необходимые для изложения результатов понятия и формулы из дифференциальной геометрии, основные обозначения, доказаны некоторые равенства, на которые будем ссылаться в доказательствах.

В §1.2 формулируется основной результат первой главы и следствия из него.

Пусть M – n-мерное, связное, некомпактное, ориентируемое многообразие класса C^3 без края. Рассмотрим гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$, полученную C^3 – вложением $u : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, и C^2–гладкую функцию $\Phi: \ \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi(-\xi) = \Phi(\xi)$.

Если обозначить через ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^1-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определена величина

$$F(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi) d\mathcal{M}, \tag{2}$$

где $d\mathcal{M}$ – элемент n-мерного объема на $\mathcal{M}$. Величина (2) не зависит от выбора нормали ξ. Пусть V – C^2-векторное поле, определенное в окрестности поверхности $\mathcal{M}$, такое что $V|_{\mathcal{M}} = h \cdot \xi$, где $h \in C_0^1(\mathcal{M})$, ξ – поле единичных нормалей к поверхности, при этом предполагается, что интегральные кривые поля V лежат на прямых линиях и вдоль них выполнено $|V| = \mathrm{const}$.

Ясно, что если повехность $\mathcal{M}$ вложена, то любое векторное поле $V = h \cdot \xi$, заданное вдоль $\mathcal{M}$, можно продолжить в некоторую окрестность $\mathcal{M}$ так, что будут выполнены сформулированные выше условия. Заметим, что согласно работе [12] вторая вариация не зависит от выбора продолжений.

Пусть $U(\mathcal{M})$ – окрестность поверхности $\mathcal{M}$, в которой определено поле V и $g_t(x) : U(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ – однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов, порожденная векторным полем V. То есть $g_t(x)$ есть решение задачи

Коши:

$$\frac{dg_t(x)}{dt} = V(g_t(x)),$$
$$g_t(x)|_{t=0} = x.$$

Положим $\mathcal{M}_t = g_t(\mathcal{M})$. Ясно, что $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$.

Будем говорить, что поверхность $\mathcal{M}$ является *стационарной*, если первая вариация функционала (2) равна нулю при всех бесконечно малых деформациях $\mathcal{M}_t$ поверхности $\mathcal{M}$, то есть

$$\left. \frac{d}{dt} \int\limits_{\mathcal{M}_t} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M}_t \right|_{t=0} = 0.$$

Стационарная поверхность $\mathcal{M}$ *устойчива*, если вторая вариация функционала (2) знакоопределена при всех бесконечно малых деформациях $\mathcal{M}_t$ поверхности $\mathcal{M}$, иначе – *неустойчива*.

Замечание. В случае, когда вторая вариация локально знакоопределена, поверхность будем называть *экстремальной*.

Символом v^T обозначим ортогональную проекцию вектора v на касательную плоскость $T_x\mathcal{M}$ к поверхности $\mathcal{M}$ в соответствующей точке $x \in \mathcal{M}$. Пусть

$$G = \{G_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1},\ G_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \delta_{ij}(\Phi - \langle D\Phi, \xi \rangle), \tag{3}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $D\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{n+1}} \right)$.

Теорема 1.1. *Если $F(t) = F(\mathcal{M}_t)$, то*

$$F'(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}(D\Phi)^T - nH\Phi) h \, d\mathcal{M},$$

где div *– дивергенция в метрике поверхности $\mathcal{M}$, $H = \langle \vec{H}, \xi \rangle$ – средняя кривизна поверхности $\mathcal{M}$ относительно нормали ξ. Более того, если $F'(0) = 0$ для любой C^2 – функции $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$,то*

$$F''(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right\} d\mathcal{M},$$

где G – квадратичная форма, соответствующая матрице (3), k_i – главные кривизны, а E_i – главные направления поверхности $\mathcal{M}$.

Далее будем рассматривать такие функции $\Phi(\xi)$, для которых матрица G знакоопределена.

Следствие 1.1.1. *Поверхность $\mathcal{M}$ класса C^3 является экстремалью функционала (2) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{n} k_i G(E_i, E_i) = 0.$$

Замечание. Любая плоскость, независимо от функции $\Phi(\xi)$, является экстремалью функционала (2).

Следствие 1.1.2. *Если матрица G – положительно определена, то любая экстремаль является локально-минимальной для функционала (2), если матрица G – отрицательно определена, то – локально-максимальной.*

В §1.3 формулируется теорема 1.2 как следствие теоремы 1.1 в локальных координатах. Приводится пример функционала (1), для которого на основании теоремы 1.2 могут быть выписаны первая и вторая вариации.

Результаты первой главы опубликованы в работах [13], [14], [26].

Глава 2. «Признаки устойчивости и неустойчивости экстремальных поверхностей»

В данной главе приводятся признаки устойчивости и неустойчивости экстремальных поверхностей, которые основаны на изучении второй вариации функционала типа площади.

Отметим, что задача определения устойчивости поверхности по знакоопределенности второй вариации близка к задачам изопериметрического характера, рассматриваемым, например, в работе [1].

В §2.1 при изучении устойчивости экстремальной поверхности применено понятие G-емкости конденсатора на поверхности и получена теорема 2.1. Следствием из нее стала теорема 2.2, которая обобщает известный результат М. до Кармо и Ч.К. Пенга [10].

Пусть $\Omega \subset \mathcal{M}$ – произвольная область на поверхности $\mathcal{M}$ и $P, Q \subset \Omega$ – два непересекающихся замкнутых множества в $\overline{\Omega}$. Всякую такую тройку $(P, Q; \Omega)$ назовем конденсатором на поверхности $\mathcal{M}$.

G-емкостью конденсатора $(P, Q; \Omega)$ (см. [3]) назовем величину

$$\operatorname{cap}_G(P, Q; \Omega) = \inf_{\varphi} \int\limits_{\mathcal{M}} G(\nabla\varphi, \nabla\varphi)\, d\mathcal{M},$$

где точная нижняя грань берется по всем локально липшицевым функциям $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^1$ таким, что $\varphi(m) = 1$ при $m \in P$ и $\varphi(m) = 0$ при $m \in Q$.

Заметим, что такие функции φ существуют (см. теорему П.С. Урысона [4, с. 91]).

Обозначим $||A||_G^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i)$.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{M}$ – экстремальная поверхность для функционала (2) со знакоопределенной матрицей G (3). Если найдется область $\Omega \subset \mathcal{M}$ и компакт $P \Subset \Omega$ такие, что*

$$\int\limits_P ||A||_G^2 \, d\mathcal{M} > \mathrm{cap}\ _G(P, \partial\Omega; \Omega),$$

то $\mathcal{M}$ – неустойчива.

Поверхность $\mathcal{M}$ назовем G – параболической (см. [3]), если найдется такая последовательность подобластей $\Omega_k \subset \mathcal{M}$, $\Omega_k \Subset \Omega_{k+1}$, что выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{cap}\ _G(P, \partial\Omega_k; \Omega_k) = 0$$

для любого $P \Subset \mathcal{M}$.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{M}$ – устойчивая экстремаль функционала (2). Если $\mathcal{M}$ имеет G – параболический тип, то $\mathcal{M}$ является плоскостью.*

В §2.2 рассматривается гауссово отображение поверхности $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$.

Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейное отображение, причем $\det L \neq 0$. Коэффициентом искажения L называется число

$$q(L) = \frac{\max\limits_{|x|=1} |L(x)|}{\min\limits_{|x|=1} |L(x)|}.$$

Если $f : D \to \mathbb{R}^n$ – отображение, осуществляемое вектор-функцией f класса $W^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$, то для почти всех $x \in D$ определено отображение

$$df_x : (X_1, X_2, \ldots, X_n) \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) X_i$$

и функция $J(x, f) = \det df_x$.

Говорят [6], что отображение $f :\ D \to \mathbb{R}^n$ есть *отображение с ограниченным искажением* области D, если выполнены следующие условия:

а) $J(x, f) \geqslant 0$ для почти всех $x \in D$;

б) если в точке $x \in D$ $J(x, f) = 0$, то линейное отображение df_x есть тождественный нуль;

в) существует постоянная $q < \infty$ такая, что $q(df_x) \leqslant q$ в каждой точке $x \in D$, где $J(x, f) \neq 0$.

Пусть $\mathcal{M}$ – 2-мерная экстремальная поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная вложением $u : M \to \mathbb{R}^3$. Для каждой точки $x \in \mathcal{M}$ обозначим через $\gamma(x)$ единичный вектор в $\mathbb{R}^3$, параллельный вектору внешней нормали к поверхности $\mathcal{M}$ в точке $u(x)$. Отображение $\gamma : \mathcal{M} \to \mathbb{S}^2$ – поверхности $\mathcal{M}$ в 2-мерную единичную сферу $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ называется гауссовым отображением поверхности $\mathcal{M} : \gamma(x) = \xi$. Напомним, что гауссова кривизна K совпадает с якобианом гауссова отображения. Тогда, в соответствии с общим определением отображения с ограниченным искажением, гауссово отображение γ является отображением с ограниченным искажением, если гауссова кривизна K поверхности не меняет знака на $\mathcal{M}$ и существует постоянная $q \geqslant 1$ такая, что для почти всех $x \in \mathcal{M}$ выполняется неравенство:

$$\max |d\gamma(\xi)| \leqslant q \min |d\gamma(\xi)|,$$

где $d\gamma$ – дифференциал отображения γ в точке x, а $\max$ и $\min$ берутся по всем единичным векторам $\xi \in T_x\mathcal{M}$.

В данном параграфе доказано, что гауссово отображение экстремальной поверхности является отображением с ограниченным искажением, и получена оценка коэффициента искажения

$$q \leqslant \sup_{\xi \in \mathbb{S}^2} \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)},$$

где G – знакоопределенная матрица, $\Lambda(\xi)$ и $\lambda(\xi)$ – ее максимальное и минимальное по модулю собственные числа. Но основным результатом, которым мы пользовались в дальнейшем для доказательств теорем §2.3, явилось следствие.

Следствие 2.4.1. *Если $\Phi(\xi) = \phi(\xi_3)$ и функция $B(\xi_3) = \dfrac{\phi''(\xi_3)(1-\xi_3^2)}{\phi(\xi_3) - \phi'(\xi_3)\xi_3}$ такая, что $\inf\limits_{-1 \leqslant \xi_3 \leqslant 1} B(\xi_3) > -1$ и $\sup\limits_{-1 \leqslant \xi_3 \leqslant 1} B(\xi_3) < +\infty$, то коэффициент искажения гауссова отображения $\gamma : \mathcal{M} \to \mathbb{S}^2$ имеет оценку*

$$q \leqslant \frac{1 + \sup\limits_{-1 \leqslant \xi_3 \leqslant 1} B(\xi_3)}{1 + \inf\limits_{-1 \leqslant \xi_3 \leqslant 1} B(\xi_3)}. \tag{4}$$

Также в данном параграфе получен признак устойчивости и неустойчивости на основании оценки площади гауссова образа экстремальной поверхности.

Для всякого открытого множества $F \subset \mathbb{S}^2$ определим величины:

$$\mu^-(F) = \inf_{v \in C_0^1(F)} \frac{\int\limits_F \frac{\Lambda^2(\xi)}{\lambda(\xi)} |\nabla_S v(\xi)|^2 \, dS}{\int\limits_F \lambda(\xi) v^2(\xi) \, dS},$$

$$\mu^+(F) = \inf_{v \in C_0^1(F)} \frac{\int\limits_F \frac{\lambda^2(\xi)}{\Lambda(\xi)} |\nabla_S v^2(\xi)|^2 \, dS}{\int\limits_F \frac{\Lambda^2(\xi)}{\lambda(\xi)} v^2(\xi) \, dS}.$$

Здесь ∇_S – градиент в метрике единичной сферы $\mathbb{S}^2$, dS – элемент площади единичной сферы.

Теорема 2.5. *Если $\mu^-(\gamma(\mathcal{M})) < 2$, то экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ неустойчива, если $\mu^+(\gamma(\mathcal{M})) \geqslant 2$, то $\mathcal{M}$ – устойчива.*

Теорема 2.5 является обобщением хорошо известного признака устойчивости минимальных поверхностей (см. [2]).

В §2.3 найдена оценка емкости конденсатора с помощью коэффициента искажения (4) для случая $\Phi(\xi) = \phi(\xi_3)$ и $\phi(\xi_3) - \phi'(\xi_3)\xi_3 > 0$. Рассматриваемые экстремальные поверхности являются трубками.

Будем говорить, что поверхность $\mathcal{M}$ трубчата (см. [5]), если существуют два числа $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ такие, что для каждой гиперплоскости $\Pi_t = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = t\}$, ортогональной вектору $e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$, сечение $\Sigma(t) = \mathcal{M} \cap \Pi_t$ не пусто при всяком $t \in (a;b)$ и всякая порция, заключенная между двумя гиперплоскостями Π_{t_1} и Π_{t_2} при $a < t_1 < t_2 < b$, является компактом. В этом случае интервал $(a;b)$ будем называть проекцией поверхности $\mathcal{M}$ на ось Ox_{n+1}. Будем говорить, что $\mathcal{M}$ трубчата в целом, если $a = -\infty$ и $b = +\infty$.

Теорема 2.6. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ – двумерная трубчатая поверхность класса C^2 с проекцией $(a;b)$ является экстремалью функционала (2). Тогда для любых $a < t_1 < t_2 < b$ выполнено*

$$\operatorname{cap}_G(P(t_2), Q(t_1); \Omega) \leqslant \frac{qI}{t_2 - t_1},$$

где $I = \int\limits_{\Sigma(t)} (\phi(\xi_3) - \phi'(\xi_3)\xi_3)|\nabla f|$ – величина, не зависящая от t, q – коэффициент искажения (4).

С помощью теоремы 2.6. были получены следующие характеристики трубчатых экстремальных поверхностей.

Теорема 2.7. *Всякая трубчатая в целом, экстремальная для функционала (2) поверхность класса C^2 имеет G – параболический тип.*

Следствие 2.7.1. *Всякая трубчатая в целом, экстремальная поверхность неустойчива.*

Результаты данной главы были опубликованы в работах [13], [15], [16], [19], [20], [22], [23], [24].

Глава 3. «Исследование устойчивости поверхностей вращения»

Результаты третьей главы относятся к исследованию экстремальных поверхностей вращения.

В §3.1 получены формулы первой и второй вариации функционала (2) при $\Phi(\xi) = \phi(\xi_{n+1})$, где $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция класса $C^2(\mathbb{R})$, для поверхности вращения.

Пусть C^2-гладкая поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задана радиус-вектором

$$\vec{R}(t,\theta) = (t, r(t)\rho(\theta)), \tag{5}$$

где $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\rho(\theta)$ – радиус-вектор сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $t \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, $r(t)$ – C^2-гладкая функция на (a,b), ξ_{n+1} – координата единичной нормали к поверхности $\mathcal{M}$. Обозначим

$$\begin{aligned} \tau &= \xi_{n+1} = -\dot{r}(t)/\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}, \\ \phi'(\tau) &= d\phi/d\tau,\ \phi''(\tau) = d^2\phi/d\tau^2, \\ \dot{r} &= dr(t)/dt,\ \ddot{r} = d^2r(t)/dt^2, \end{aligned}$$

$$B(t) = \phi''(\tau)/\left((1+\dot{r}^2(t))\,(\phi(\tau) - \phi'(\tau)\tau)\right),$$

тогда справедлива

Теорема 3.1. *Поверхность $\mathcal{M}$, заданная радиус – вектором (5), является экстремальной тогда и только тогда, когда*

$$\frac{r(t)\ddot{r}(t)}{1+\dot{r}^2(t)} - \frac{n-1}{B(t)+1} = 0.$$

Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ устойчива тогда и только тогда, когда квадратичная форма

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ \frac{h_t'^2(t,\theta)}{1+\dot{r}^2(t)}\,(B(t)+1) + \frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)} - \frac{h^2(t,\theta)}{r^2(t)(1+\dot{r}^2(t))}\frac{(n-1)(n+B(t))}{B(t)+1} \right\} \times$$

$$\times\,(\phi(\tau) - \phi'(\tau)\tau)\ d\mathcal{M}$$

знакоопределена в классе липшицевых функций $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ класса $C_0^1(\mathcal{M})$.

Пусть $h(t,\theta) = h(t)$ и

$$\alpha(t) = (\phi(\tau) - \phi'(\tau)\tau)\,\frac{r(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}(B(t)+1),$$

$$\beta_n(t) = \frac{\phi(\tau) - \phi'(\tau)\tau}{r(t)\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}\frac{(n-1)(n+B(t))}{B(t)+1}.$$

Следствие 3.1.1. *Экстремальная поверхность, заданная радиус – вектором (5), является устойчивой, если* $\alpha(t)\beta_n(t) \leqslant 0$.

В заключительной части параграфа приведены примеры, иллюстрирующие результаты теоремы 3.1 и следствия 3.1.1.

В §3.2 дан вывод уравнения экстремалей для поверхностей вращения, заданных графиком функции $x_3 = f(|x|)$.

В §3.3 получен интегральный признак устойчивости и неустойчивости экстремальной поверхности вращения в терминах протяженности поверхностей вращения вдоль своей оси.

Пусть $\sup\limits_{t\in(a,b)} \alpha(t)\beta_n(t) = \nu^2 < +\infty$, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3. *Пусть экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ задана радиус – вектором (5). Для функций $\alpha(t) > 0$ и $\beta_n(t) > 0$ поверхность $\mathcal{M}$ является устойчивой, если*

$$\int\limits_a^b \frac{dt}{\alpha(t)} \leqslant \pi\nu,$$

и неустойчивой, если

$$\int\limits_a^b \beta_n(t)dt > \pi\nu.$$

В §3.4 установлено, что экстремали функционала (2) с функцией

$$\phi(\xi_3) = \phi(\tau) = \tau\left(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{(1-\eta^2)^{(p-2)/2}}{\eta^2}\,d\eta\right),$$

где $C = (\phi'(\tau_0)\tau_0 - \phi(\tau_0))(1-\tau_0^2)^{(2-p)/2}$, $C_1 = \phi(\tau_0)/\tau_0$, задают класс p-минимальных поверхностей. Данный класс впервые был указан профессором В. М. Миклюковым и исследовался в работе В. Г. Ткачева [11], где для таких поверхностей, в частности, была доказана оценка (4).

В §3.5 вычислена G-емкость поверхности вращения и приведен пример применения G-емкости для нахождения областей устойчивости экстремальных поверхностей вращения.

Результаты данной главы были опубликованы в работах [13], [17] – [19], [21], [25], [27] – [30].

В заключение, хотела бы выразить огромную благодарность своему научному руководителю, д. ф.-м. н. Владимиру Александровичу Клячину, за его уникальное учебно-методическое мастерство и индивидуальный подход как в подготовке данной дисертационной работы, так и в процессе всего обучения в университете. А также д. ф.-м. н., профессору В.М. Миклюкову и к. ф.-м. н. А.Н. Кондрашову за полезные обсуждения и замечания. Хотелось бы отдельно выразить свою искреннюю признательность декану математического факультета ВолГУ, д. ф.-м. н., профессору А.Г. Лосеву за внимательное отношение и энергичную поддержку. Огромное спасибо родителям и сплоченному коллективу математического факультета ВолГУ за располагающую обстановку и помощь во всем.

Список литературы

[1] *Авхадиев Ф. Г.* Новые изопериметрические неравенства для моментов областей и жесткости кручения / Ф. Г. Авхадиев // Изв. вузов. Матем. – 2004. – №7(506).– С. 3–11.

[2] *Аминов Ю. А.* Минимальные поверхности. Цикл лекций / Ю. А. Аминов // Харьков: Ротапринт, ХГУ, 1978. – 126 с.

[3] *Клячин В. А.* Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Матем. сб. – 1996.– Т. 187. №. 11. – С. 67–88.

[4] *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин // М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972. – 543 с.

[5] *Миклюков В. М.* Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности / В. М. Миклюков, В. Г. Ткачев // Мат. сб. – 1989.– Т. 180. № 9. – С. 1278–1295.

[6] *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением / Ю. Г. Решетняк // Новосибирск: «Наука» Сиб. отд. – 1982. – 279 с.

[7] *Саранин В.А.* Равновесие жидкостей и его устойчивость / В.А. Саранин // М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 144 с.

[8] *Тужилин А. А.* Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей / А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко //М.: Наука, 1991. – 174 с.

[9] *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности / Р. Финн // Математическая теория, М.: Мир, 1989. – 312 с.

[10] *do Carmo M.* The stable minimal surfaces in R^3 are planes / M. do Carmo, C. K. Peng // Bull.(Ne Ser.) Amer. Math. Soc. – 1979. – V. 1. №6. – P. 903–906.

[11] *Vladimir G. Tkachev.* External geometry of p-minimal surfaces / Vladimir G. Tkachev // Geometry from the Pacific Rim, de Gruyter, Berlin, 1997. – P. 363-375.

[12] *Simons J.* Minimal varieties in riemannian manifolds / J. Simons // Ann. of Math. – 1968. – V.88, №2. – P.62–105.

Работы автора, опубликованные по теме диссертации

[13] *Клячин В. А.* Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади / В. А. Клячин, Н. М. Медведева // ВИНИТИ РАН. – 2006. – № 1313 - В 2006 Деп. – 23 с.; Сибирские электронные математические известия. Статьи. – 2007. – Т. 4. – С. 113–132.

[14] *Медведева Н. М.* Вторая вариация функционала весовой площади / Н. М. Медведева // Вестник Волгоградск. гос. ун-та: научно-теоретический журнал. Серия 9: Исследования молодых ученых. Вып.1. Ч. 2: физико–математические и экономические науки. – 2001. – С. 24–27.

[15] *Медведева Н. М.* Емкостный признак неустойчивости для экстремалей функционала весовой площади / Н. М. Медведева // Материалы международной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2002». – Казань: Казан. мат. об-во, 2002. – Т. 18. – С. 59–60.

[16] *Медведева Н. М.* Емкостный признак неустойчивости / Н. М. Медведева // VII Межвузовская конференция студентов и молодых ученых г. Волгограда и Волгоградской области. Вып.4: Физика и математика: Тезисы докладов. – Волгоград: ВолГУ, 2003. – С. 51–52.

[17] *Медведева Н. М.* Исследование устойчивости экстремальной поверхности вращения / Н. М. Медведева // Геометрический анализ и его приложения: Тезисы докладов международной школы-конференции. – Волгоград: ВолГУ, 2004. – С. 128–129.

[18] *Медведева Н. М.* Исследование устойчивости экстремальных поверхностей вращения / Н. М. Медведева // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2007.– Т. 7. Вып. 2. – С. 25 – 32.

[19] *Медведева Н. М.* Квазиконформность гауссова отображения и устойчивость экстремальных поверхностей / Н. М. Медведева // Международная школа – конференция по анализу и геометрии, посвященная 75-летию академика Ю.Г.Решетняка: Тезисы докладов. – Новосибирск: ООО «Омега Принт», 2004. – С. 179–180.

[20] *Медведева Н. М.* Квазиконформность гауссова отображения экстремальных поверхностей / Н. М. Медведева // Материалы международной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2003». – Казань: Казан. мат. об-во, 2003. – Т. 21. – С. 163–164.

[21] *Медведева Н. М.* Об устойчивости экстремальной поверхности вращения / Н. М. Медведева // Материалы Седьмой международной научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». – Казань: Казан. мат. об-во, 2005. – Т. 30. – С. 106–107.

[22] *Медведева Н. М.* Оценка емкости конденсатора / Н. М. Медведева // IX Межвузовская конференция студентов и молодых ученых г. Волгограда и Волгоградской области. Вып.4. Физика и математика: тез. докл. – Волгоград: ВолГУ, 2005. – С. 65–66.

[23] *Медведева Н. М.* Параболичность и устойчивость экстремальной поверхности / Н. М. Медведева // Вестник Волградск. гос. ун-та. Серия 1: Математика. – 2005. – Вып. 9. – С. 48–53.

[24] *Медведева Н. М.* Признак неустойчивости экстремальной поверхности из R^n / Н. М. Медведева // Материалы международной научной конференции «Алгебра и анализ 2004». – Казань: Казан. мат. об-во, 2004. – Т. 23. – С. 100–101.

[25] *Медведева Н. М.* Пример нахождения областей устойчивости р – минимальных поверхностей / Н. М. Медведева // Современные проблемы теории функций и их приложения: тезисы докладов 13-ой Саратовской зимней школы. – Саратов: Научная книга, 2006. – С. 115–116.

[26] *Медведева Н. М.* Условие экстремальности поверхности для функционала типа площади / Н. М. Медведева // VIII Межвузовская конференция студентов и молодых ученых г. Волгограда и Волгоградской области. Вып. 4: Физика и математика: Тезисы докладов. – Волгоград: ВолГУ, 2004. – С. 59–60.

[27] *Медведева Н. М.* G–параболичность и устойчивость экстремальной поверхности вращения / Н. М. Медведева // Материалы Восьмой международной Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». – Казань: Казан. мат. об-во, Казанский гос. ун-т, 2007. – Т. 35. – С. 171–172.

[28] *Medvedeva N. M.* The research of stability of extremal surfaces of rotation / N. M. Medvedeva // Научное издание. 12-ая Международная конференция ассоциации европейских женщин-математиков. Тезисы докладов. – Волгоград: ВолГУ, 2005. – С. 69–70.

[29] *Полубоярова Н. М.* Оценка G-емкости конденсатора / Н. М. Полубоярова // Материалы Девятой международной Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». – Казань: Казан. мат. об-во, Казанский гос. ун-т, 2009. – Т. 38. – С. 226–227.

[30] *Полубоярова Н. М.* Исследование устойчивости n-мерных экстремальных поверхностей вращения / Н. М. Полубоярова // Материалы Девятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2010». – Казань: Казан. матем. об-во, 2010. – Т. 40. – С. 274–278.